

Amicable morfismy na sturmovských slovech

Tomáš Hejda

tohe@centrum.cz

katedra matematiky

FJFI, České vysoké učení technické v Praze

vedoucí práce: Prof. Ing. Edita Pelantová, CSc.

Cíle práce a motivace

- 1 Seznámit se s problematikou kombinatoriky na slovech
- 2 Prozkoumat poznatky o sturmovských slovech
- 3 Zkoumat amicable sturmovské morfismy a jejich počty podle jejich parametrů

Věta (Ambrož, Masáková, Pelantová)

- 1 *Bud' φ, ψ primitivní sturmovské morfismy takové, že $\varphi \propto \psi$. Pak morfismus $\eta = \text{ter}(\varphi, \psi)$ má pevný bod daný nedegenerovanou výměnou tří intervalů.*
- 2 *Bud' η primitivní morfismus daný nedegenerovanou výměnou tří intervalů mající nedegenerovaný pevný bod. Pak existují sturmovské morfismy $\varphi \propto \psi$ takové, že η či η^2 je rovno $\text{ter}(\varphi, \psi)$.*

Slova a morfismy

- **Abeceda** $\{0, 1\}$
- **Konečná slova**, $u \in \{0, 1\}^*$, tvoří monoid
- **Nekonečná slova**, $u \in \{0, 1\}^\infty$
- **Morfismy**: zobrazení φ na slovech taková, že $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$
- Příklad: Fibbonaciho morfismus

$$\varphi : \begin{array}{l} 0 \rightarrow 01 \\ 1 \rightarrow 0 \end{array}$$

Amicable slova a morfismy

- **Amicable slova:** $u \propto v \dots$ Příklad:

$$u = 0\ 01\ 0\ 1\ 0\ 01\ \dots$$

$$v = 0\ 10\ 0\ 1\ 0\ 10\ \dots$$

- **Ternarizace** $\text{ter}(u, v) = 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 2\ \dots$

- **Amicable morfismy:** $\varphi \propto \psi$, iff, $(\forall u, v)(u \propto v \implies \varphi(u) \propto \psi(v))$
- **Ternarizace** amicable morfismů $\{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$

Sturmovská slova a morfismy

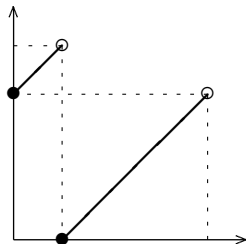
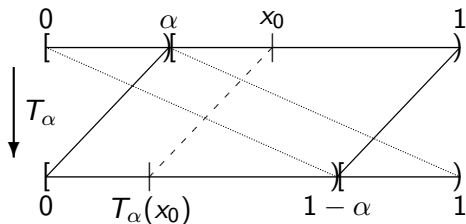
- **Sturmovská slova:** slova s minimální komplexitou, $C(u, n) = n + 1$
- Ekvivalentní definice: 2iet slova, mechanická a slova a řez mřížky
- Příklad: Fibonacciho slovo

$$f = 010010100100100101001010010010100 \dots$$

- **Sturmovské morfismy:** zachovávají sturmovská slova, $\varphi(u)$ je sturmovské pro u sturmovské
- **Parametry** sturmovského morfismu: $p = |\varphi(01)|_0$, $N = |\varphi(01)|$
- Příklad: $\varphi : \begin{array}{l} 0 \rightarrow 010 \\ 1 \rightarrow 01001 \end{array} \quad p = 5, N = 8$
- Tvrzení: p a N jsou nesoudělná

Výměna dvou intervalů

- **Výměna dvou intervalů** $T_\alpha : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$

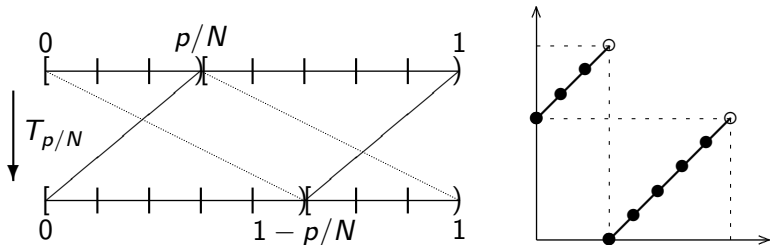


- Výměna 2 intervalů → **2iet slovo**
- Výměna r intervalů → **r -iet slovo**

- α iracionální → 2iet slovo je sturmovské
- α racionální → 2iet slovo je periodické

Výměna dvou intervalů — α racionální

- $\alpha = p/N$ zlomek v základním stavu
- Existuje právě N různých 2iet slov délky N pro $T_{p/N}$



- Pro φ sturmovský morfismus s (p, N) je $\varphi(01)$ jedno z těchto slov

Výsledná formule

Věta

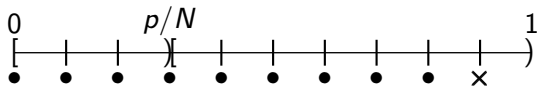
Budte $p, N \in \mathbb{N}$ nesoudělná čísla, $p < N$. Potom počet párů amicable sturmovských morfismů s parametry (p, N) je roven

$$2m(N - 1) - m^2,$$

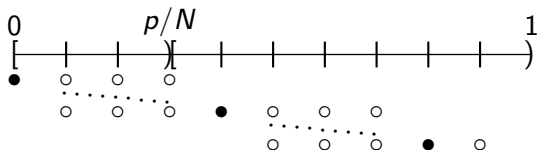
kde $m = \min(p, N - p)$.

Myšlenka důkazu

- Sturmovské morfismy s parametry (p, N) odpovídají bodům na $[0, 1)$ kromě posledního



- Ke každému jsou amicable ty blíže než $m = \min(p, N - p)$



- Jejich posčítáním získáme výsledek □

Další výsledky, náměty k práci

Výsledky:

- Na základě přípustných parametrů sturmovských morfismů umíme popsat počty amicable párů
- Lze definovat **matici incidence morfismu** jako $M_{ij} = |\varphi(i)|_j$ a umíme také částečně popsat počty morfismů i podle tvaru matice jejich ternarizace

Otevřené problémy:

- Určit přesně matice ternarizací a jejich počty
- Najít jednoduchý ekvivalentní popis matic 3iet zachovávajících morfismů